МИНИСТЕРСТВО СПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение
профессиональная образовательная организация
«Брянское государственное училище (колледж) олимпийского резерва»

МАТЕМАТИКА:
ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

методическое пособие для студентов 1 курса

Брянск 2023

Ходотова М.И., Рыхлик Н.Н.

Математика: теория и практика. Методическое пособие для студентов 1 курса, обучающихся по специальностям: 49.02.01 – Физическая культура, 49.02.02 – Адаптивная физическая культура. – Брянск, 2023. – 37 с.

В методическом пособии представлены теоретические основы и варианты заданий для самостоятельного решения, помогающие студентам наиболее эффективно организовать самостоятельную работу по усвоению программного содержания дисциплины «Математика». Пособие предназначено для студентов 1 курса, обучающихся по специальностям: 49.02.01 – Физическая культура, 49.02.02 – Адаптивная физическая культура.

Рассмотрено и утверждено на заседании Методического Совета ФГБУ ПОО «БГУОР»

Протокол №1 от «30» августа 2023 г.

РАЗДЕЛ 1. ПОВТОРЕНИЕ КУРСА МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1.Числа и вычисления

Числовые множества:

1. **Натуральные числа N**: 1,2,3,…
2. **Целые числа Z**: 0,±1,±2,±3,…
3. **Рациональные числа** $\boldsymbol{Q} = \frac{m\in Z}{n\in Z}$: $\frac{1}{2}, -1\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \ldots$

Знаменатель дроби показывает на сколько равных частей разделили, а числитель дроби показывает сколько таких частей взяли.

4. **Иррациональные числа I:** $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi \approx 3{,}14, \mathrm{e} \approx 2{,}7, \ldots$
5. **Действительные числа R:** R=Q+I.

Числа: *точные* (в классе 29 человек) и *приближенные* (расстояние от Москвы до Киева равно 960 км; погрешность измерительных приборов и протяженность городов).

Одним из источников получения приближенных является округление.

Округление числа 4,75: *по избытку* – 4,8; *по недостатку* – 4,7.

Правила округления:

1)если первая из отбрасываемых цифр менее 5, то последнюю цифру не изменяют (округление с недостатком);

2)если первая отбрасываемая цифра больше 5 или равна 5, то последнюю оставленную цифру увеличивают на единицу (округление с избытком).

Задание 1

Вычислить:

a) $2 \cdot 2\frac{2}{5} - 2\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{13}{15}$

b) $\frac{\left(12\frac{1}{6} - 6\frac{1}{27} - 5\frac{1}{4}\right) \cdot 13{,}5 + 0{,}111}{0{,}02}$

c) $\left(\frac{\left(6 - 4\frac{1}{2}\right) : 0{,}03}{\left(3\frac{1}{20} - 2{,}65\right) \cdot 4 + \frac{2}{5}} - \frac{\left(0{,}3 - \frac{2}{30}\right) \cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88 + 2\frac{3}{25}\right) \cdot \frac{1}{80}}\right) : 2\frac{1}{20}$

Задание 2

Найдите значение выражения:

a) $\mathrm{a}(25\mathrm{a}^2 - 49)\left(\frac{1}{5\mathrm{a}+7} - \frac{1}{5\mathrm{a}-7}\right)$ при $\mathrm{a} = 31{,}2$

b) $\frac{\mathrm{a}+5\mathrm{b}+18}{\mathrm{b}+\mathrm{a}+9}$ при $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = 3$

Задание 3

Найдите значение выражения:

a) $\left(\sqrt{2\frac{2}{5}} - \sqrt{5\frac{2}{5}}\right) : \sqrt{\frac{3}{20}}$

b) $\sqrt{548^2 - 420^2}$

c) $\frac{(3\sqrt{5}) - \sqrt{3})^2}{8 - \sqrt{15}}$

Задание 4

Округлить:

a) до десятых: 12,34
b) до сотых: 3,2465
c) до тысячных: 3,4335
d) до тысяч: 12375

ВОПРОСЫ для контроля:

1. Назовите все числовые множества и приведите примеры.
2. На какие виды делятся все числа?
3. Какие есть способы округления чисел?
4. Назовите правила округления.

1.2. Уравнения и неравенства

Уравнение – это выражение, содержащее переменную.

Решить уравнение – это значит, найти его корни или установить, что их нет.

I.Линейное уравнение: ax = b

1) $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$;
2) a = 0,$b \neq 0$,то корней нет ;
3) a=0,b=0, то множество решений.

II. Квадратное уравнение: $ax^2+bx+c=0$

$D = b^2-4ac$

1. D>0

$X_{1,2=} - \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$

D=0 $x = -\frac{b}{2a}$

D<0 нет корней

2. $ax^2+ bx=0$

x(ax+b)=0

x=0 или ax+b=0

$x = -\frac{b}{a}$

3. $x^2+ px+q=0$ –правильное квадратное уравнение.

$x_1+x_2= -p$

$x_1 \cdot x_2=q$по теореме Виета

III. Уравнения высших степеней решаются различными методами.

Например, уравнение 4-ой степени – биквадратное решается путем замены переменной.

Неравенство – это выражение, составленное с помощью знаков >, <, $\geq$, $\leq$.

Решить неравенство – это значит, найти все его решения или доказать, что их нет.

Неравенства решаются различными **методами**:

1) графический метод,
2) метод интервалов.

Алгоритм решения неравенств второй степени (графический способ):

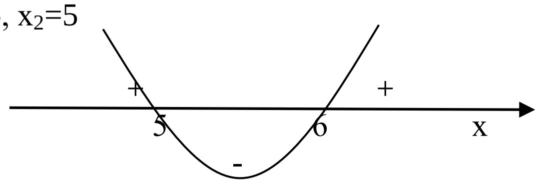
$ax^2+bx+c>0$

1. Определяем знак коэффициента «а» и указать направление ветвей параболы.
2. Определяем знак D.
3. Если $D \geq 0$, то находим корни и отмечаем их на оси. Если D<0, то следующий шаг.
4. Схематично изобразить параболу.
5. Записать множество решений параболы.

Пример:

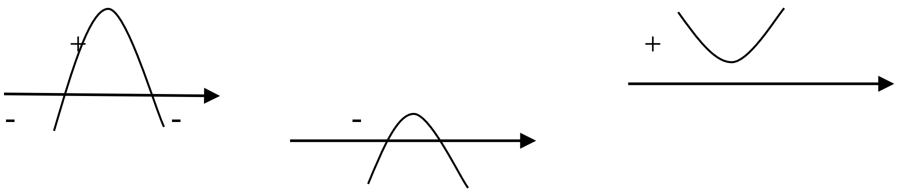
$x^2-11x+30<0$

1. a=1>0, ветви направлены вверх.
2. D=121-120=1
3. $x_1=6$, $x_2=5$



Ответ: $x \in (5; 6)$

Возможные варианты расположения параболы:



Задание 1

Решить ур-е:

a) $2x^2+4x=0$
b) $6x^2+3x=0$
c) $6y^2=0,24$
d) $x^2+4x-5=0$
e) $4x^4-17x^2+4=0$

Задание 2

Решить неравенство:

a) 0,3(2m-3)<3(0,6m+1,3)
b) $-3x^2-5x+12\le 0$
c) $x^2-x-2\ge 0$
d) $x^2-3x+4>0$
e) $-2x^2-5x+3>0$
f) $0,5x^2-2x+3<0$
g) $0,5x^2-2x+3\ge 0$

Задание 3

Решите системы уравнений и неравенств:

а) $\begin{cases}-x+3y=7;\\2x-2y=-2.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x<2;\\x\ge -1.\end{cases}$ в) $\begin{cases}x\ge 0;\\x>7.\end{cases}$

ВОПРОСЫ для контроля:

1. Что такое уравнение?
2. Что значит решить уравнение?
3. Назовите известные вам виды уравнение?
4. Как решается каждый вид уравнения?
5. Что такое неравенство?
6. Что значит решить неравенство?
7. Перечислите методы решения неравенств.
8. Расскажите алгоритм решения неравенства второй степени.

1.3. Решение задач. Входной контроль

Задание 1

Среди чисел 97; -9,2; 1,7320508…; 4(61); 1; -905; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{7}$; 35; -52; 8,2 выпишите те, которые являются:

a) натуральными;
b) целыми;
c) рациональными;
d) иррациональными.

Задание 1

Среди чисел -48; 9; 5(12); 9,64364…; $\frac{1}{8}$; 12; -70; $\sqrt{63}$; 37; 53,7; $\sqrt{5}$ выпишите те, которые являются:

a) натуральными;
b) целыми;
c) рациональными;
d) иррациональными.

Задание 3

Выполните действия:

a) $\left(2\frac{1}{2}+6\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right):\frac{1}{33}-89$
b) $\left(11\frac{1}{3}+\frac{5}{7}-6\frac{1}{7}\right):\frac{1}{21}+34.$

Задание 4

Сравните числа:

a) 5,1 и $\sqrt{26}$
b) -9,8 и -$\sqrt{95}$
c) 2,3 и $\sqrt{7}$
d) -9,3 и -$\sqrt{89}$
e) 6,5 и $\sqrt{41}$.

Задание 5

Разложите на простые множители:

a) 2640;
b) 18360
c) 35100
d) 7020
e) 17680
f) 28561.

Задание 6

Представьте в виде десятичной дроби числа:

a) $\frac{41}{30}$

b) $4\frac{3}{5}$

c) $\frac{61}{41}$

d) $3\frac{1}{4}$.

Задание 7

Представьте в виде обыкновенной дроби числа:

a) 0,(6)

b) 0,(27)

c) 0,0(18)

d) 2,1(23)

e) 0,(8)

f) 0,(43)

g) 0,(027)

h) 5,2(18).

Задание 8

При каких значениях t уравнение имеет два корня:

a) $3x^2 + tx + 3 = 0$

b) $2x^2 + tx + 8 = 0$

c) $2x^2 + tx + 2 = 0$.

Задание 9

Решите биквадратное уравнение:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

c) $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

e) $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$

Задание 10

Решите уравнение:

a) $x^3 - 81x = 0$

b) $x^3 - 36x = 0$

c) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

d) $x^2 - 25 = 0$

e) $5x^2 - 4x + 21 = 0$

f) $3x^2 - 24x = 0$

Задание 11

Решите неравенство:

a) $2x^2 - x - 15 > 0$

b) $x^2 - 16 < 0$

c) $x^2 + 12x + 80 < 0$

d) $2x^2 - 13x - 15 > 0$

e) $x^2 - 16 < 0$

f) $x^2 + 12x + 80 < 0$.

Задание 12

Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = -10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$

Задание 13

Решите уравнение:

a) $(x - 100)^2 - 7(x - 100) - 8 = 0$

b) $(x + 100)^2 - 5(x + 100) + 6 = 0$

Задание 14

Решите систему неравенств:

a) $\begin{cases} 7{,}3 - 1{,}4(3 - x) > 2{,}9 - 0{,}6x \\ 5{,}8 - (4{,}9 - x) > 1{,}7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x - 24 > 0 \\ -2x + 12 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 7 < 19 \\ 30 - 8x < 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(3x - 4) \geq 4(x + 1) - 3 \\ x(x - 4) - (x + 3)(x - 5) > -5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4(5x - 4) \geq 13(x - 1) + 18 \\ x(x + 5) - (x - 2)(x + 8) > 9 \end{cases}$

РАЗДЕЛ 2. СТЕПЕНИ И КОРНИ. СТЕПЕННАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

2.1. Степенная функция, ее свойства

$y = x^n$

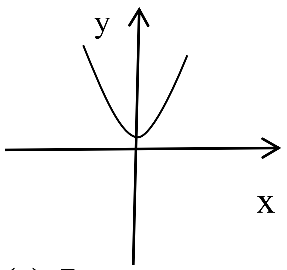
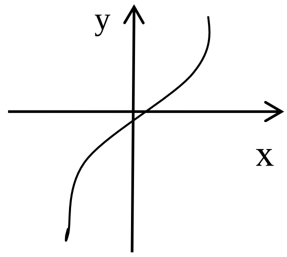
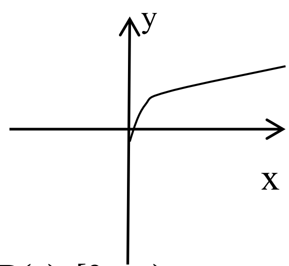
Степенные функции:

$y=x^2$

$y=x^5$

$y = x^{\frac{1}{2}}$

Исследование степенной функции $y=x^n$

n- чётная	n-нечётная	$\frac{m}{n}$-рациональный показатель
$y=x^2, y=x^2, y=x^6$  1.D(y)=R 2.четная 3.непереферическая 4. (0;0)- точка пересечений с осями координат 5. ↓ на (-∞;0]∪[0±∞) 6. парабола 7. (y) = [0;+∞)	$y=x^3, y=x^5, y=x^7$  1. D(y)=R 2. нечётная 3. непериодическая 4. (0;0)- точка пересечений с осями координат 5. ↑на D(y) 6. кубическая парабола 7. E(y)=R	$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$  1. D(y)=[0;+∝) 2. общего вида; 3. непериодическая 4. (0;0)- точка пересечений с осями координат 5. ↑на D(y) 6. кривая расположена в первой четверти 7. E(y)=[0;+∝)

Задание 1

Построить графики функций:

1) $y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^6$
2) $y=x^3$, $y=x^5$, $y=x^7$
3) $y = \sqrt{x}$

Задание 2

При каком значении p прямая $y = x + p$ имеет с параболой $y = x^2 - 3x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p.

Задание 3

Функция задана формулой $f(x) = x^4$. Сравните:

1) $f(-2)$ и $f(6)$
2) $f(-3)$ и $f(4)$.

Задание 4

Принадлежит ли графику функции $y = x^7$ точка:

1) A(2,128)
2) B(-2,128)
3) A(3,2187)
4) B(3,-2187).

ВОПРОСЫ для контроля:

1. Какая функция называется степенной?
2. Осуществите исследование степенной функции, когда n- чётное.

3. Осуществите исследование степенной функции, когда n- нечётное.
4. Осуществите исследование степенной функции, когда $\frac{m}{n}$-рациональный показатель.

2.2. Свойства степени с рациональным и действительным показателями

$x^3, 2^5; (-1)^n$ показатели степени

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$

Свойства степени:

1.$a^1 = a$
2.$a^0 = 1$
3.$a^{-1} = \frac{1}{a}$
4.$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
5.$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
6.$a^n : a^m = a^{n-m}$
7.$(a^n) = a^{nm}$
8.$(ab)^n = a^n b^n$
9$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
10.$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
11.$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x^1} = \sqrt{x}$.

Задание 1

Из данных выражений выберете те, которые смысла не имеют: $(-3)^2$, $(-16)^{\frac{3}{4}}$, $(-8)^{\frac{5}{6}}$, 0^{-3}, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $0^{-\frac{1}{2}}$, $(-3)^{-1}$.

Задание 2

Вычислить:

1) $a^6 \cdot a^{-8} \cdot a^{10} \cdot a^{-\frac{1}{2}}$
2) $a^3 \cdot (ab)^2$
3)$\frac{a^6 \cdot b^3}{a^7 \cdot b^5}$
4)$(4x^{-2}y^3) \cdot (0{,}5x^2y^{-1})^3$
5)$\frac{5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{4}}}{5^2}$
6)$\frac{7^{\frac{7}{3}} 7^{-\frac{4}{3}}}{7^2}$
7)$x^{\frac{5}{7}}$
8) $x^{\frac{3}{5}}$
9) $\sqrt[4]{x^7}$
10)$(\frac{1}{0{,}25} a^{-3}b^4)^{-2} \cdot (\frac{1}{2}a^5b^{-6})^{-1}$

Задание 3

Упростите выражение:

1) x^5x^3 2) $(x^3)^5$ 3) $x^{13}:x^4$.

Задание 4

При каком значении k выполняется равенство $2^{3+k} = 64$.

Задание 5

Найдите значение выражения $\frac{n^{k+4}}{n^{k+1}}$ при n=5.

Задание 6

Сократите дробь $\frac{5cn^7}{10n^5c^3}$.

ВОПРОСЫ для контроля:

1. Что такое показатель степени?
2. Какие степень имеет свойства?

2.3. Решение иррациональных уравнений

Иррациональное уравнение – это уравнение, в котором выражение с переменной находится под корнем или возводится в дробную степень.

Для решения иррациональных уравнений используются следующие **приемы**:

1) возведение в соответствующую степень обе части уравнения;
2) введение новой переменной;
3) сведение к системе уравнений;
4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

$$\sqrt[n]{f(x)} = a.$$

Алгоритм их решения следующий:
1) Находим ОДЗ.
2) Возводим обе части уравнения в n-ю степень:

$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = a^n,$

$f(x) = a^n.$

3) Находим корни уравнения, полученного на первом шаге алгоритма: $f(x) = a^n$.
4) Выполняем соответствие корней ОДЗ.

Задание 1

Решить уравнения:
1) $\sqrt{x-2} = 1$
2) $\sqrt{x-1} = -3$
3) $\sqrt[5]{x-1} = -3$
4) $\sqrt{\frac{1}{5-2x}} = \frac{1}{3}$
5) $\sqrt[3]{2x+3} = 1$
6) $\sqrt[3]{x^2-17} = 2$
7) $\sqrt[4]{2-x} = 0.$

Задание 2

Решить уравнения:
1) $\sqrt{-72-17x} = -x$
2) $\sqrt{x^2+7x-2} = 6-x$
3) $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{-2x}$
4) $x+1 = \sqrt{1-x}$
5) $\sqrt{3-x} = x-3$
6) $\sqrt{x-1} = x-3$
7) $\sqrt{1-2x} = x-5$
8) $\sqrt{x+3} = -x-4$
9) $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4.$

Задание 3

Решить уравнения:
1) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2} = 4$
2) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{11-x}$
3) $\sqrt{x-13} - \sqrt{10-x} = 2$
4) $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1-x$
5) $\sqrt{6-4x} + \sqrt{x-6} = 3$
6) $\sqrt{x-7} + \sqrt{5+x} = -1$
7) $x + \sqrt{2x^2-7x+5} = 1.$

Задание 4

Решить уравнение относительно x:
1) $\sqrt{x} = a$
2) $\sqrt{x-1} = a$
3) $\sqrt{x} = 1+a.$

Задание 4

Выяснить с помощью графика, сколько корней имеет уравнение:
1) $\sqrt{x} = 6-x^2$
2) $x^3-2 = \sqrt{x-1}$
3) $\sqrt{x+1} = (x-1)^2.$

ВОПРОСЫ для контроля:
1. Что такое иррациональное уравнение?
2. Какие существуют приемы для решения иррациональных уравнений?
3. Расскажите алгоритм решения иррационального уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = a$.

<u>2.4. Показательная функция, ее свойства. Показательные уравнения и неравенства</u>

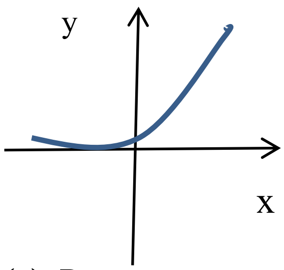
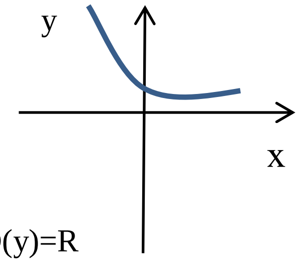
$y=x^n$ – степенная функция,

$y=a^x$ – показательная функция

Функция вида $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, x – любое число называется **показательной**.

Здесь x – независимая переменная, аргумент; y – зависимая переменная, функция; основание степени a – конкретное число.

Исследование степенной функции $y=a^x$

$a>1$	$0<a<1$
 1.D(y)=R 2.общего вида 3.непериодическая 4. с Ox нет точек пересечения с Oy: (0;1) 5. ↑ на D(y) 6. 7. E(y) = (0;+∞)	$y=x^3, y=x^5, y=x^7$  1.D(y)=R 2.общего вида 3.непериодическая 4. с Ox нет точек пересечения с Oy: (0;1) 5. ↓ на D(y) 6. 7. E (y) = (0;+∞)

Показательные уравнения – это уравнения, содержащие переменные в показателе степени.

Простейшее показательное уравнение $a^x=b$, $a>0$, $a \neq 1, x \in R$.

1) $b>0$, то единственное решение;

2) $b\leq 0$, то нет корней.

Решим это уравнение с помощью приведения к одинаковому основанию:

$a^x=b$

$a^x=a^n$

$x=n$

Степени равны, так как основания равны. Следовательно, равны показатели.

Показательные неравенства

Если $a > 1$, то показательное неравенство:

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$

равносильно неравенству

$f(x) > g(x)$

Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство:

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$

равносильно неравенству

$f(x) < g(x)$

<u>Задание 1</u>

Определить является ли функция показательной:

а) $y = 5^x$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

в) $y = (-2)^x$
г) $y = 1^x$.
Задание 2
Построить график функции и провести исследование:
а) $y = 2^x$;
б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Задание 3
Решить уравнения:
а) $2^x = 8$
б) $3^x = 81$
в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

Задание 4
Решить уравнения:
а) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$
б) $5^{x^2-2x-1} = 25$
в) $2^{x^2-7x+12} = 1$
Задание 5
Решить неравенство:
a) $3^{2x-4} \leq 27$
b) $0{,}9^{x^2-4x} < \left(\frac{10}{9}\right)^3$
c) $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \geq 1$
d) $7^x \geq 2^x$
e) $3^{2x-1} - 3^{2x-3} < \frac{8}{3}$
f) $3^x \geq -x + 4$
Задание 6
Какая из функций$y = 0{,}6^x$, $y = \left(\frac{9}{5}\right)^x$, $y = 5^x$, $y = 0{,}2^x$ является убывающей?
Задание 7
Решить неравенство:
1) $7^{2x+1} - 8 \cdot 7^x + 1 < 0$
2) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0$
Задание 8
Решить систему уравнений:
1) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 5^{x+y} = 25 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + y = -2 \\ 6^{x+5y} = 36 \end{cases}$.

2.5. Логарифм числа. Свойства логарифмов

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в который необходимо возвести основание a, чтобы получить число b (a>0, b>0) и обозначается $\log_a b$.

$$a^{\log_a b} = b$$

Свойства логарифмов:
1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.
4. $\log_a = \log_a x - \log_a y$.
5. $\log_a x^p = p \log_a x$

На практике рассматриваются логарифмы по различным основаниям, в частности по основанию 10.

Логарифмом положительного числа по основанию 10 называют десятичным логарифмом числа в и обозначается,$\lg b$ т.е. вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$.

Например, $\log_{10} 15 = lg15$; $\log_{10} \frac{2}{7} = lg\,\frac{2}{7}$.

Натуральным логарифмом (обозначается ln) называется логарифм по основанию e $In\ x = \log_b x$.

Примеры вычисления десятичных логарифмов:
lg 1=0, так как $1 = 10^0$
lg 10=1, так как $10 = 10^1$
lg 100=2, так как $100 = 10^2$

lg 0,1=-1, так как $0{,}1 = 10^{-1}$
lg 0,01=-2, так как $0{,}01 = 10^{-2}$
lg 0,001=-3, так как $0{,}001 = 10^{-3}$

Задание 1

Вычислите:

a) $\log_2 8$
b) $\log_5 25$
c) $\log_3 81$
d) $\log_4 16$
e) $\log_5 \frac{1}{25}$
f) $\log_{16} 1$.

Задание 2

Упростите выражения:

а) $\log_3 64 + \log_9 64 + \log_{27} 69$
б) $9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$
в) $2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$.

Задание 3

Решите уравнение:

a) $\log_5 x = 2$
b) $\log_7 x = -2$
c) $\log_x 81 = 4$
d) $\log_x \frac{1}{16} = 2$.

Задание 3

При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

a) $\log_{(2x+7)}(3 - 9x)$
b) $\log_{11}(x^2 + 3x - 10)$.

Задание 4

Упростите выражение:

a) $\log_{1,25} \log_{10} 10000 + \log_{1,25}\left(\frac{5}{16}\right)$
b) $\frac{\log_{25} 6}{\log_{125} 6}$.

Задание 5

Сравните числа:

a) $\log_3 10$ и $\log_4 15$
b) $\log_6 7$ и $\log_4 15$
c) $\log_{0,3} 5$ и $\log_{0,3} 7$
d) $\log_3 6$ и $\log_4 7$.

Задание 6

Вычислите $\frac{2^{\log_3 5+2}}{5^{\log_3 6}} + 4^{\log_2(3-\sqrt{3})} + 9^{\log_3(\sqrt{3}+3)}$.

ВОПРОСЫ для контроля:

1. Что такое логарифм и как он обозначается?
2. Какими свойствами обладает логарифм.
3. Что такое десятичный логарифм и как он сокращенно записывается?
4. Что такое натуральный логарифм и как он записывается сокращенно?

2.6. Логарифмическая функция, ее свойства. Логарифмические уравнения, неравенства

Логарифмическая функция

Функция вида$y = log_a x$, где a>0, $a \neq 1, x$ >0 называется **логарифмической.**

Логарифмические уравнения

1. $$\log_a f(x) = b \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$
2. $$\log_a f(x) = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}$$
3. $$\log_a f(x) = \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Логарифмические неравенства

Логарифмические неравенства – это неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где a>0, $a \neq 1$ и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Решение логарифмических неравенств:

1. a>1

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(знак неравенства сохраняется)

2. 0<a<10

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(знак неравенства меняется)

Задание 1

Построить график функции и провести исследование:

a) $y = log_2 x$
b) $y = log_{\frac{1}{2}} x$
c) $y = log_{0,3} x$
d) $y = log_2(x-1)$
e) $y = log_3(3-x)$.

Задание 2

Решить уравнения:

1. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) = -2$
2. $\log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 5$
3. $\log_3(x^2+4x+3) = \log_3 3$

Задание 3

Решить уравнения:

1. $lg^2 x - 3lgx + 2 = 0$
2. $\log^2{}_3 x - 2\log_3 x - 3 = 0$

Задание 4

Решить неравенства:

1. $\log_2 x > 1$
2. $\log_3 x \geq 0$
3. $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$
4. $\log_{0,3} x \leq 2$
5. $\log_{0,9}(3-x) > 1$

ВОПРОСЫ для контроля:

1. Какая функция называется логарифмической?
2. Расскажите три случая решения логарифмических уравнений?
3. В каких случаях и каков алгоритм решения логарифмических уравнений методом замены переменной?
4. Что такое логарифмическое неравенство?
5. Расскажите случаи решения логарифмических неравенств.

2.7. Решение задач. Степенная, показательная и логарифмическая функции

Задание 1

Вычислить:

a) $\left(\left(6^{\frac{4}{3}}\right) + (-0,25)^{-1}\right) \cdot (-0,5)^0$

b) $\left(\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^8 + \left(\frac{3}{2}\right)^0\right)^{-2}$.

Задание 2

Решить показательное уравнение:

a) $11^x = 17^x$
b) $3^{x-1} = 5^{1-x}$
c) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$
d) $2^{3\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{3\sqrt{x}-1} = 20$

e) $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} = 56$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 5.$

<u>Задание 3</u>

Решить показательное неравенство:

a) $0{,}4^{x^2-x-20} > 1$

b) $0{,}3^{x^2} < 0{,}3^{5x+6}$

c) $0{,}2^{x-2} \geq 0{,}008.$

<u>Задание 4</u>

Решить логарифмическое уравнение:

a) $\lg(x+1) + \lg(x-1) = lg3$

b) $\lg(3x-17) - \lg(x+1) = 0$

c) $\lg(x-4) + \lg(x+5) = 1$

d) $\log_{x-1}32 = 5$

e) lg(3-x) – lg(x + 2) = 2lg2

f) $\log_3^2 x - \log_3 x = 4^{\log_4 6}$

<u>Задание 5</u>

Решить логарифмическое неравенство:

a) $\log_3(5x-1) < \log_3(4x+3)$

b) $\log_{0,25}(x-1) + \log_{0,25}(x+1) > \log_{0,25} 3$

c) $\log_{0,4} x + \log_{0,4}(x-1) \geq \log_{0,4}(x+3)$

d) $\log_{0,3} x + \log_{0,3}(x+1) \geq \log_{0,3}(8-x).$

<u>Задание 6</u>

Найти область определения функции

$$y = \frac{1-x}{\log_3(x^2-9)}$$

<u>Задание 7</u>

Является ли возрастающей или убывающей функция:

a) $y = 0{,}37^{x}$

b) $y = 6^{x}$

c) $y = 8^{-x}$

d) $y = 0{,}2^{-x}$.

<u>Задание 8</u>

Укажите какая из функций является показательной, а какая степенной:

a) $y = \sqrt{x}$

b) $y = x^5$

c) $y = x^{-3}$

d) $y = 8^x$

e) y=2x

f) $y = x^{-2}$

<u>Задание 9</u>

Какие их перечисленных функций являются возрастающими?

a) $y = \log_5 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $y = \log_{\pi} x$

d) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$

<u>Задание 10</u>

Построить график функции:

a) $y = 3^{x}$

b) $y = log_3 x$

c) $y = x^4$

РАЗДЕЛ 3. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

3.1. Тригонометрические функции произвольного угла, числа

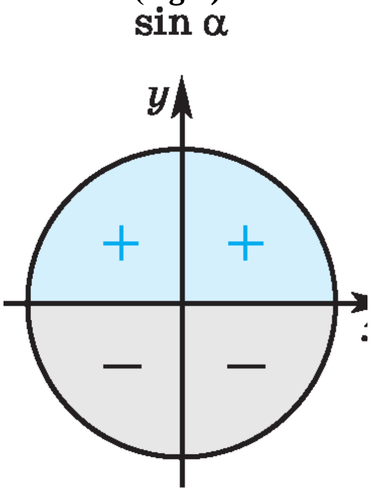
Углом в 1 радиан называется центральный угол, опирающийся на дугу, равную по длине радиусу окружности.

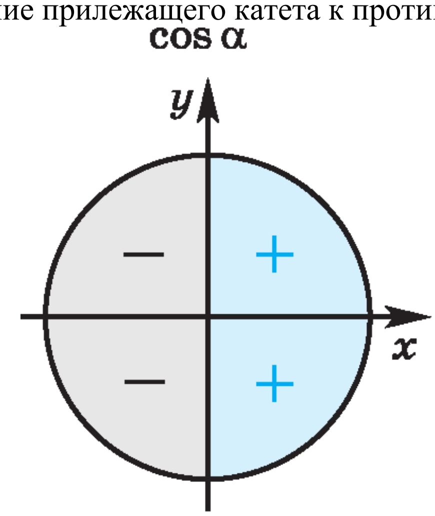
Синус (sin α) – это отношение противолежащего катета к гипотенузе

Косинус (cos α) – это отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс (tg α) – это отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс (ctg α) – это отношение прилежащего катета к противолежащему.





Задание 1

Найти градусную меру угла, равного

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{5\pi}{11}$ e) $\frac{11\pi}{6}$

Задание 2

Найти радианную меру угла, равного

a) 60^0 b) 45^0 c) 315^0 d) 240^0 e) 720^0

Задание 3

Заполните тригонометрическую таблицу

	0	30	45	60	90
sin					
cos					

Задание 4

Найдите числовое значение выражения:

a) $\sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4}$

b) $6\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos 0 + tg\frac{\pi}{3}$

c) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\pi + ctg\frac{\pi}{6}$

d) $3tg\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}$

ВОПРОСЫ для контроля:

5. Что такое тригонометрия и как обозначаются основные функции?
6. Отношением гипотенузы к противолежащему катету является ….
7. Что из себя представляет синус треугольника?

3.2. Основные тригонометрические тождества.

Основные тригонометрические тождества:

1. $sin^2\,\alpha \;+\; cos^2\,\alpha \;=\; 1$
2. $tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha \;=\; 1$
3. $tg\,\alpha \;=\; sin\,\alpha \;\div\; cos\,\alpha$
4. $ctg\,\alpha \;=\; cos\,\alpha \;\div\; sin\,\alpha$
5. $1 \;+\; tg^2\,\alpha \;=\; 1 \;\div\; cos^2\,\alpha$
6. $1 \;+\; ctg^2\alpha \;=\; 1 \;\div\; sin^2\alpha$

Из этих формул, в свою очередь, выводятся многие другие формулы, которые используются в тригонометрических вычислениях и при решении тригонометрических уравнений. А именно:

• формулы тангенса суммы и тангенса разности:

$tg(\alpha \;+\; \beta) = \;tg\,\alpha \;+\; tg\,\beta \;\; - \;tg\,\alpha\,tg\,\beta$,

$tg(\alpha \;-\; \beta) \;=\; tg\,\alpha \;-\; tg\,\beta \;\; + \;tg\,\alpha\,tg\,\beta$;

• формулы двойного угла:

$sin\,2\alpha \;=\; 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha,$

$cos\,2\alpha \;=\; cos^2\,\alpha \;-\; sin^2\,\alpha \;=\; 2\,cos^2\,\alpha \;-\; 1 \;=\; 1 \;-\; 2\,sin^2\,\alpha,$

$tg\,2\alpha \;=\; 2\,tg\,\alpha\,1 \;-\; tg2\,\alpha$;

• формулы понижения степени:

$$sin^2\,\alpha \;= \frac{1 \;-\; cos\,2\alpha}{2},$$

$$cos^2\,\alpha \;= \frac{1 \;+\; cos\,2\alpha}{2};$$

• формулы тройного угла:

$sin\,3\alpha \;=\; 3\,sin\,\alpha \;-\; 4\,sin^3\,\alpha,$

$cos\,3\alpha \;=\; 4\,cos^3\,\alpha \;-\; 3\,cos\,\alpha,$

$$tg\,3\alpha \;= \frac{3\,tg\,\alpha \;-\; tg^3\,\alpha}{1 \;-\; 3\,tg^2\,\alpha}\;.$$

Формулы сложения - это формулы преобразования тригонометрических функций суммы и разности двух аргументов:

$cos(\alpha \;+\; \beta) \;=\; cos\,\alpha\,cos\,\beta \;-\; sin\,\alpha\,sin\,\beta;$

$cos(\alpha \;-\; \beta) \;=\; cos\,\alpha\,cos\,\beta \;+\; sin\,\alpha\,sin\,\beta;$

$sin(\alpha \;+\; \beta) \;=\; sin\,\alpha\,cos\,\beta \;+\; cos\,\alpha\,sin\,\beta;$

$sin(\alpha \;-\; \beta) \;=\; sin\,\alpha\,cos\,\beta \;-\; cos\,\alpha\,sin\,\beta;$

$tg(\alpha \;+\; \beta) \;=\; tg\,\alpha \;+\; tg\,\beta \quad - \;tg\,\alpha\,tg\,\beta$;

$tg(\alpha \;-\; \beta) \;=\; tg\,\alpha \;-\; tg\,\beta \;+\; tg\,\alpha\,tg\,\beta$;

$ctg(\alpha \;+\; \beta) \;=\; ctg\,\alpha\,ctg\,\beta \;-\; 1\,ctg\,\alpha \;+\; ctg\,\beta$;

$ctg(\alpha \;-\; \beta) \;=\; ctg\,\alpha\,ctg\,\beta \;+\; 1\,ctg\,\beta \;-\; ctg\,\alpha$

Закономерности, определяющие четные и нечетные функции в тригонометрии:

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
2. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
3. $tg(-\alpha) = \;-tg\alpha$
4. $ctg(-\alpha) = ctg\;\alpha$

<u>Задание 1</u>

В прямоугольном треугольнике есть угол α. Известно, что $sin\,\alpha \;=\; 0{,}8$. Чему равен $cos\alpha$?

<u>Задание 2</u>

Вычислите $sin\alpha$, если $cos\alpha \;=\; 0{,}28$ и α принадлежит IV четверти.

<u>Задание 3</u>

Известно, что $tg\alpha \;=\; 0{,}75$. Найдите $cos\alpha$ и $sin\alpha$, если угол α принадлежит III четверти.

<u>Задание 4</u>

Вычислите:

a) $sin\ 12^0\ cos\ 78^0\ +\ cos\ 12^0\ sin\ 78^0$;

b) $sin\ 56^0\ cos\ 26^0\ -\ cos\ 56^0\ sin\ 26^0$;

c) $cos\ \frac{7\pi}{12}\ cos\ \frac{5\pi}{12}\ +\ sin\ \frac{7\pi}{12}\ \ sin\ \frac{5\pi}{12}$;

d) $\sin 21^0 \sin 24^0\ -\ cos\ 21^0\ cos\ 24\ ^0$;

e) $sin\ \frac{9\pi}{7}\ cos\ \frac{2\pi}{7}\ -\ cos\ \frac{9\pi}{7}\ \ sin\frac{2\pi}{7}$;

f)$sin\ 11\pi\ 36\ cos\ 7\pi\ 36 + cos\ 11\pi\ 36\ sin\ 7\pi\ 36$.

Задание 5

Докажите равенство:

a) $\frac{cos\ 66^0\ cos\ 6^0 + cos\ 24^0\ cos\ 84^0}{cos\ 65^0\ cos\ 5^0\ +\ cos\ 85^0\ cos\ 25^0}\ =\ 1.$

b) $sin\ 10^0\ sin\ 30^0\ sin\ 50^0\ sin\ 70^0\ \ =\ \frac{1}{16}$.

Задание 5

Докажите тождество:

a) $\frac{2\sin^2\alpha\cdot ctg\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=tg2\alpha$

b) $\frac{2\cos^2\alpha\cdot tg\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=-tg2\alpha$

c) $\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha}=tg\alpha$

d) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$

e) $(tg\alpha-\sin\alpha)\cdot\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+ctg\alpha\right)=\sin^2\alpha$

f) $\frac{\cos\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha+\sin\alpha}=tg2\alpha$

Задание 5

Упростите:

a) $2cos^2\frac{5\pi}{12}-1$

b) $sin\frac{9\pi}{14}\cdot cos\frac{5\pi}{12}-1$

c) $cos\frac{2\pi}{8}-sin\frac{2\pi}{8}$

d) $sin\frac{\pi}{7}\cdot cos\frac{4\pi}{21}+cos\frac{\pi}{7}\cdot sin\frac{4\pi}{21}$

e) $\frac{sin4\alpha-sin2\alpha}{cos4\alpha+cos2\alpha}$

ВОПРОСЫ для контроля:

1. Окружность единичного радиуса с центром в начале координат - это …
2. Вычислить $sin360+tg45$
3. Переведите из градусной меры в радианную 180?

3.3. Тригонометрические функции, их свойства и графики

Функция синус ее свойства и график

$$\boldsymbol{y=\sin x}$$

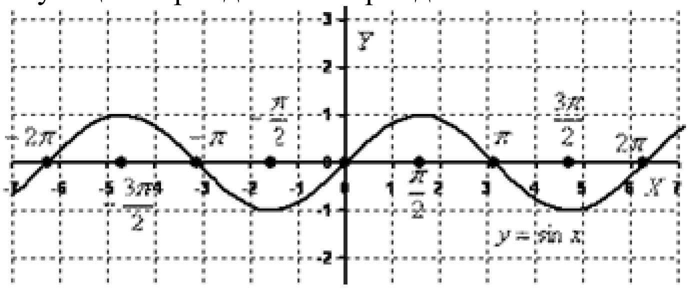
1) Область определения $D(x)=R$;

2) Область значений $E\ (y)\ =\ [-1;1]$;

3) Функция нечетная $\sin(-x)=-\sin x$;

4) Функция не является монотонной на всей своей области определения;

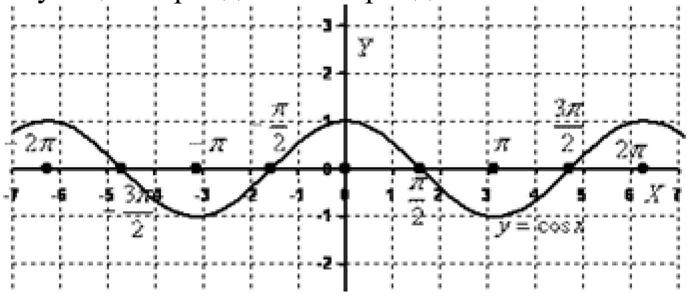
5) Функция периодична с периодом $T = 2\pi$



Функция косинус ее свойства и график

$$\boldsymbol{y = \cos x}$$

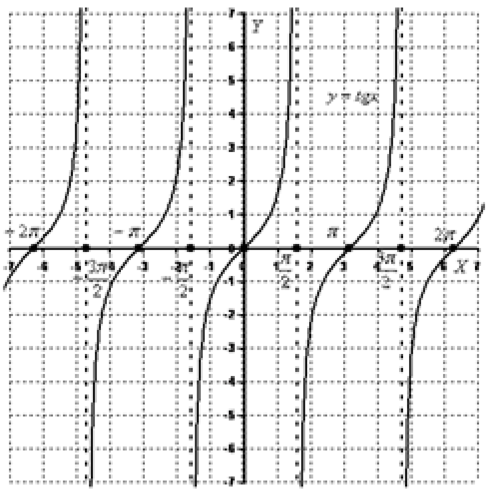
1) Область определения $D(x) = R$;
2) Область значений $E\ (y)\ =\ [-1; 1]$;
3) Функция четная $\cos(-x) = \cos x$.
Из этого следует симметричность графика функции относительно оси ординат;
4) Функция не является монотонной на всей своей области определения;
5) Функция периодична с периодом $T = 2\pi$.



Функция тангенс ее свойства и график

$$\boldsymbol{y = tg\ x}$$

1) Область определения $D(x) = R$ кроме $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ где $n \in Z$.
2) Область значений $E\ (y)\ = R$, т.е. значения тангенса не ограничены;
3) Функция нечетная $tg(-x) = -tg\ (x)$;
4) Функция монотонно возрастает в пределах своих так называемых веток тангенса, которые мы сейчас увидим на рисунке;
5) Функция периодична с периодом $T = \pi$.



Функция котангенс ее свойства и график

$$\boldsymbol{y = ctg\ x}$$

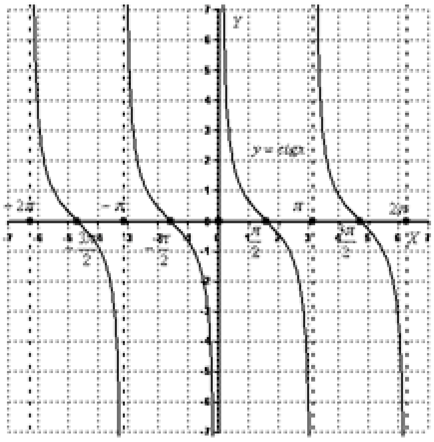
1) Область определения $D(x) = R$ кроме $x = \pi n,$ где $n \in Z$.

2) Область значений $E\ (y)\ = R$, т.е. значения тангенса не ограничены;

3) Функция нечетная $ctg(-x) = -ctg\ (x)$;

4) Функция монотонно возрастает в пределах своих так называемых веток тангенса, которые мы сейчас увидим на рисунке;

5) Функция периодична с периодом $T = \pi$.



Задание 1

Постройте графики тригонометрических функций:

a) $y = -\cos x$

b) $y = \frac{1}{2}\sin x$

c) $y = 2{,}5\cos x$

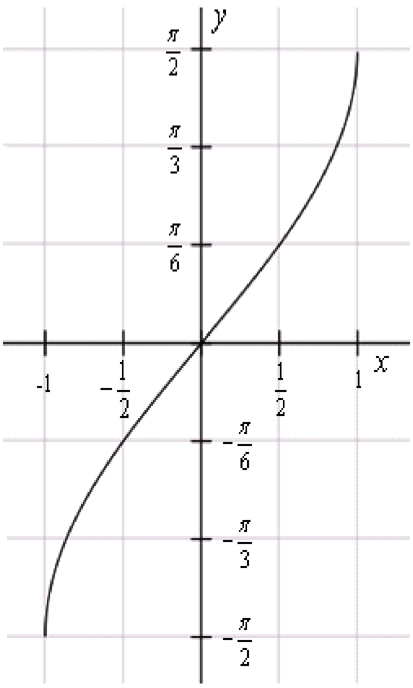
d) $y = \sin x + 2$

e) $y = \cos 2x$

3.4.Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа $a \in[-1; 1]$ называется угол $x\epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a Т.е. $arcsin\ a = x \Leftrightarrow sin\ x = a, x\epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

График функции $\boldsymbol{y = arcsin\ x}$.



Основные свойства арксинуса:

1) $\sin(\arcsin x) = x$ при $y\ \epsilon[-1; 1]$,

2) $\arcsin(\ \sin y) = y$ при $y\ \epsilon[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Основные свойства функции арксинус:

1) Область определения $D\ (x) = [-1; 1]$;

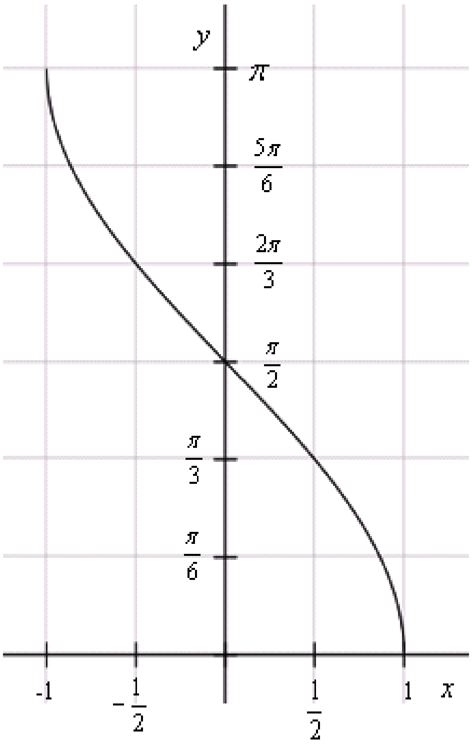
2) Область значений $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) Функция нечетная $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Эту формулу желательно отдельно запомнить, т.к. она полезна для преобразований. Также отметим, что из нечетности следует симметричность графика функции относительно начала координат;

4) Функция монотонно возрастает.

Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется угол $x \in[0; \pi\ ]$, косинус которого равен a . Т.е. $arccos = x \Leftrightarrow cos\ x = a\ , x \in [0; \pi\ ]$.

График функции $\boldsymbol{y = arccos\, x}$.



Основные свойства арккосинуса:

1) $\cos(arcos\,x) = x$ при $x \in [-1; 1]$,

2) $\arccos(\cos y) = y$ при $y \in [0; \pi]$.

Основные свойства функции арккосинус:

1) Область определения $D\,(x) = [-1; 1]$;

2) Область значений $E(y) = [0; \pi]$;

3) Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$. Эту формулу тоже желательно запомнить, она пригодится нам позже;

4) Функция монотонно убывает.

Арктангенсом числа а $\in(-\infty; +\infty)$ называется угол $x\epsilon(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a . Т.е. $arctga = x \Leftrightarrow tgx = a\,, x\epsilon(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

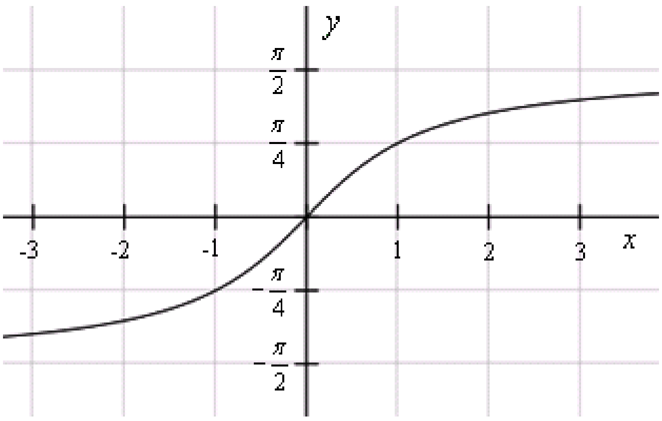


График функции $\boldsymbol{y = arctgx}$.

Основные свойства арктангенса:

1) $tg\,(arctg\,x) = x$ при $x \in R$,

2) $arctg(tgy) =$ у при $y\,\epsilon(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Основные свойства функции арктангенс:

1) Область определения $D\,(x) = R$;

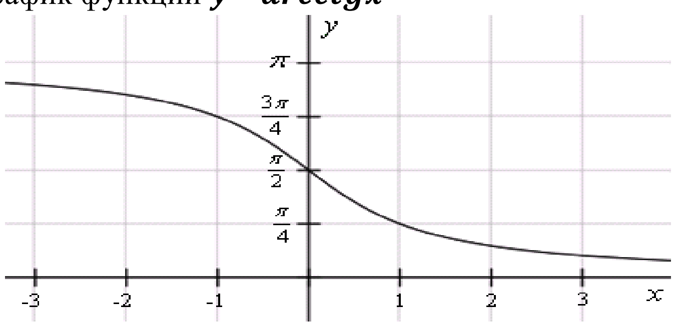
2) Область значений $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) Функция нечетная $arctg\,(-x) = -arctg\,x$. Эта формула тоже полезна, как и аналогичные ей. Как в случае с арксинусом, из нечетности следует симметричность графика функции относительно начала координат;

4) Функция монотонно возрастает.

Арккотангенсом числа a $\in(-\infty; +\infty)$ называется угол x $\in(0; \pi)$, котангенс которого равен a . Т.е. $\mathrm{arcctga} = \mathrm{x} \Leftrightarrow \mathrm{ctgx} = \mathrm{a}$, x $\in(0; \pi)$.

График функции $\boldsymbol{y = arcctgx}$



Основные свойства арккотангенса:

1) $ctg(arcctg\,x) = x$ при $x \epsilon R$,

2) $arcctg(ctg\,y) = y$ при $x\,\epsilon\,(0; \pi)$.

Основные свойства функции арккотангенс:

1) Область определения $D\,(x) = R$;

2) Область значений $E(y) = (0;\,\pi)$;

3) Функция не является ни четной, ни

нечетной, т.е. общего вида

$arcctg\,(-x) = \pi - arcctg\,x$. Запомните и эту формулу, она нам тоже пригодится;

4) Функция монотонно убывает.

Формулы, связывающие обратные тригонометрические функции.

$$arcsin\,x + arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad arctg\,x + arcctg x = \frac{\pi}{2}$$

<u>Задание 1</u>

Постройте графики следующих функций:

a) $y = \arccos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b) $y = -\arcsin x$

c) $y = \frac{1}{2} arctg\,x$

d) $y = arcctg\,x - 2$

<u>Задание 2</u>

Вычислите:

a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\,arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + arctg\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - arcctg 0$

c) $\arcsin 1 - \ arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4\,arctg(-1)$

d) $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2\,arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin(-1)$

<u>3.5.Тригонометрические уравнения и неравенства</u>

Тригонометрическим называется уравнение, в котором неизвестные находятся под знаком тригонометрических функций.

Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения вида:

$$sin\,x = a\,,\, cos\,x = a,\, tgx = a,\, ctgx = a\,.$$

1) $sin\,x = a$

Если $|a\,| > 1$ уравнение корней не имеет. Если $|a| \le 1$, решение находим по формуле:

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$

Частные случаи: $\begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow \ x = \pi n \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ \sin x = -1 \Rightarrow \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$

2) $cos\,x = a$

Если $|a| > 1$ уравнение корней не имеет. Если $|a| \le 1$, решение находим по формуле: $\mathrm{x} = \pm \arccos \mathrm{a} + 2\pi \mathrm{n}\,,\, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$.

Частные случаи: $\begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ cos\,x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n \\ cos\,x = -1 \Rightarrow \ x = \pi + 2\pi n \end{cases}$

3) $tg\,x = a \ \Rightarrow \ x = arctg\,x + \pi n, n \epsilon\, Z$

4) $ctg\,x = a \Rightarrow \ x = arcctg\,x + \pi n, n\,\epsilon\, Z$

Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным.

Уравнения вида $A\sin^2 x + B\,sin\,x + C = 0$, где $A \neq 0$, решаются приведением к квадратному путем замены $sin\,x = y$. (аналогично решаются уравнения с другими тригонометрическими функциями).

Однородные тригонометрические уравнения.

Однородные тригонометрические уравнения имеют ту же структуру, что и однородные уравнения любого другого вида. Отличительные признаки однородных уравнений:

а) все одночлены имеют одинаковую степень,

б) свободный член равен нулю,

в) в уравнении присутствуют степени с двумя различными основаниями.

Однородное тригонометрическое уравнение – это уравнение двух видов: $a\sin x + b\cos x = 0,\ a \cdot b \neq 0$ (однородное уравнение первой степени) либо $asin^2x + b\ sinx\ cosx + c\ cos^2x = 0$, a·b· c ≠0 (однородное уравнение второй степени).

Алгоритм решения однородного уравнения первой степени:

1) разделить обе части уравнения на $\cos x$ (или на $\sin x$). Делить можно на число, не равное 0, а $\cos x \neq 0$, т.к. в противном случае $a\sin x + b\cdot 0 = 0$ и $\sin x = 0$, следовательно $sin^2x + cos^2x = 0$, что неверно;

2) воспользоваться формулой $tg\ x = \frac{\sin\ x}{\cos\ x}$ (или $ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$);

3) решить получившееся уравнение.

Алгоритм решения однородного уравнения второй степени:

1) разделить обе части уравнения на cos^2x (или на sin^2x). Делить можно на число, не равное 0, $cos^2x \neq 0$, т.к. в противном случае $cos\ x = 0$, $a\ sin^2x + b\ sinx \cdot 0 + c \cdot 0$ и $sin\ x = 0$, следовательно $sin\ ^2x + cos^2x = 0$, что неверно;

2) воспользоваться формулой $tg\ x = \frac{\sin x}{\cos\ x}$ (или $ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$);

3) решить получившееся уравнение.

Неравенство, в котором неизвестная переменная находится под знаком тригонометрической функции, называется **тригонометрическим неравенством**.

Неравенства вида $sin\ x > a$, $\sin\ x < a$, $sin\ x \geq a$, $sin\ x \leq a$.

Неравенство $sin\ x > a$.

При $a \geq 1$ неравенство $sin\ x > a$ не имеет решений.

При $a < -1$ решением неравенства $sin\ x > a$ является любое действительное число.

При $-1 \leq a < 1$ решение неравенства $sin\ x >$ а выражается в виде $arcsin\ a + 2\pi n < x < \pi - arcsin\ a + 2\pi n, n \in Z$

Неравенство $sin\ x \geq a$.

При $a > 1$ неравенство $sin\ x \geq a$ не имеет решений.

При $a \leq -1$ решением неравенства $sin\ x \geq a$ является любое действительное число.

При $a = 1$ решение неравенства $sin\ x \geq a$ сводится к решению уравнения $sin\ x = 1$

При $-1 < a < 1$ решение неравенства $sin\ x \geq a$ выражается в виде $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$

Неравенство $sin\ x < a$.

При $a \leq -1$ неравенство $sin\ x < a$ не имеет решений.

При $a > 1$ решением неравенства $sin\ x < a$ является любое действительное число.

При $-1 < a \leq 1$ решение неравенства $sin\ x < a$ выражается в виде $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$

Неравенство $sin\ x \leq a$.

При $a < -1$ неравенство $sin\ x \leq a$ не имеет решений.

При $a \geq 1$ решением неравенства $sin\ x < a$ является любое действительное число.

При $a = -1$ решение неравенства $sin\ x \leq a$ сводится к решению уравнения $sin\ x = -1$.

При $-1 < a < 1$ решение неравенства $sin\ x \leq a$ выражается в виде $-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$

Неравенство $cos\ x > a$.

При $a \geq 1$ неравенство $cos\ x > a$ не имеет решений.

При $a < -1$ решением неравенства $cos\ x > a$ является любое действительное число.

При $-1 \leq a < 1$ решение неравенства $cos\ x > a$ выражается в виде $-arccos\ a + 2\pi n < x < arccos\ a + 2\pi n, n \in Z$

Неравенство $cos\ x \geq a$.

При $a > 1$ неравенство $cos\ x \geq a$ не имеет решений.

При $a \leq -1$ решением неравенства $cos\ x \geq a$ является любое действительное число.

При $a = 1$ решение неравенства $cos\ x \geq a$ сводится к решению уравнения $cos\ x = 1$

При $-1 < a < 1$ решение неравенства $sin\ x \geq a$ выражается в виде $-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

Неравенство $cos\ x < a$.

При $a \leq -1$ неравенство $cos\ x < a$ не имеет решений.

При $a > 1$ решением неравенства $cos\ x < a$ является любое действительное число.

При $-1 < a \leq 1$ решение неравенства $cos\ x < a$ выражается в виде $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

Неравенство $cos\ x \leq a$.

При $a < -1$ неравенство $cos\ x \leq a$ не имеет решений.

При $a \geq 1$ решением неравенства $cos\ x \leq a$ является любое действительное число.

При $a = -1$ решение неравенства $cos\ x \leq a$ сводится к решению уравнения $cos\ x = -1$.

При $-1 < a < 1$ решение неравенства $cos\ x \leq a$ выражается в виде $\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

Задание 1

Решите неравенство:

1. $\cos x \leq \frac{1}{2}$	9. $2 - 2\cos x > 0$	17. $2\cos x + 1 > 0$	25. $2\sin x - 1 \geq 0$
2. $3tgx - 3 \leq 0$	10. $3tgx + 3 < 0$	18. $2\sin x - 2 < 0$	26. $2\sin x + 2 < 0$
3. $2\cos x + 3 \geq 0$	11. $3tgx + 3 \geq 0$	19. $3 - 3ctgx > 0$	27. $3tgx + 3 \leq 0$
4. $2 - 2\cos x > 0$	12. $3 + 2\sin x < 0$	20. $2\cos x - 3 \leq 0$	28. $3 - 2\cos x > 0$
5. $3tgx + 3 < 0$	13. $1 - 2\sin x \leq 0$	21. $3tgx - 3 \geq 0$	29. $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $3tgx + 3 \geq 0$	14. $2\sin x + 3 \geq 0$	22. $3 - 2\sin x \geq 0$	30. $2\cos x + \sqrt{3} \geq 0$
7. $3 + 2\sin x < 0$	15. $2\sin x + 1 < 0$	23. $3ctgx - 3 < 0$	31. $\cos(\frac{1}{2}x - \frac{2\pi}{3}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$
8. $2\cos x + 3 \geq 0$	16. $2 - 2\cos x > 0$	24. $2\cos x - 2 \leq 0$	32. $\sqrt{3}\sin x + 3 < 0$

Задание 2

Решите тригонометрические уравнения:

1. $2\sin x - 2 = 0$	9. $3tgx + 3 = 0$	17. $2sin^2x - 5sinx + 2 = 0$	25. $2ctgx - 3\ tg\ x - 5$
2. $3 - 3ctgx = 0$	10. $3tgx + 3 = 0$	18. $cos^2x + 3cosx + 2 = 0$	26. $2cos^2x - 5sinx - 5 = 0$
3. $2\cos x - 3 = 0$	11. $3 + 2\sin x = 0$	19. $tg^2x - 3tgx + 2 = 0$	27. $sinx - 5\ cosx = 0$
4. $3tgx - 3 = 0$	12. $1 - 2\sin x = 0$	20. $2cos^2x - 3cosx - 2 = 0$	28. $5\ sinx - 3\ cosx = 0$
5. $3 - 2\sin x = 0$	13. $2\sin x + 3 = 0$	21. $3ctg^2x - 5ctgx + 2 = 0$	29. $3sin\ x + \sqrt{3}cosx = 0$
6. $3ctgx - 3 = 0$	14. $2\sin x + 1 = 0$	22. $2cos^2 - sinx + 1 = 0$	30. $3 + 3\cos x = -2cosx$
7. $2\cos x - 2 = 0$	15. $2 - 2\sin x = 0$	23. $4sin^2x + 8cosx - 7 = 0$	31. $5\cos x = sinx - 1$
8. $1 - 2\cos x = 0$	16. $3 - tgx = 0$	24. $tg\ x + 3ctgx = 4$	32. $2\sin x - \cos x = 2$

Задание 3

Решите тригонометрические уравнения:

1. $2sin^2x + 3sinx\ cosx - 5cos^2x = 0$
2. $4sin^2x - 3sinx\ cosx - 7cos^2x = 0$
3. $4sin^2x - 5sinx\ cosx - 9cos^2x = 0$
4. $3sin^2x - 4sinx\ cosx - cos^2x = 0$

ВОПРОСЫ для контроля:

1. Какое уравнение называется тригонометрическим?
2. Расскажите частные случаи решения тригонометрических уравнений?
3. В каких случаях и каков алгоритм решения тригонометрических уравнений?
4. Что такое тригонометрическое неравенство?
5. Расскажите случаи решения тригонометрических неравенств.

3.6. Решение задач. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции

Задание 1

Решите уравнения:

a)$2\sin x+\sqrt{2}$=0	g) $2sinx-1=0$
b)$sin^2x-2\cos x+2=0$	h)$6sin^2x+5cosx+5=0$
c)$sinx\ cosx+2sin^2x=cos^2x$	i)$3sin^2x-4\ sinx\ cosx+cos^2x=0$
d) $2cosx+\sqrt{3}=0$	j) $2cosx-\sqrt{2}=0$
e) $cos^2x+3\sin x-3=0$	k) $cos^2x+2sinx+2=0$
f)$3sin^2x=2\ sinx\ cosx+cos^2x$	l)$6sin^2x=5\ sinx\ cosx-cos^2$

Задание 2

Решите уравнения:

a) $3sin^2x-4sinx\cos x+5\ cos^2x=2$

b) $5sin^2x-2sinx\cos x+\ cos^2x=4$

c) $sin^2x-9sinx\cos x+3\ cos^2x=-1$

d) $5sin^2x+2sinx\cos x-cos^2x=1$

Задание 3

a) Решите уравнение $sin3x=cos3x$, принадлежащие отрезку [0;4]

b) Решите уравнение $sin2x=\sqrt{3}\ cos2x$, принадлежащие отрезку [-1;6]

c) Решите уравнение $\sqrt{3}sin2x=cos2x$, принадлежащие отрезку [-1;4]

d) Решите уравнение $sin3x+\cos 3x=0$, принадлежащие отрезку [0;6]

Задание 4

Решите неравенство:

$а)\sin x<0;$ $б)\cos x\ge 0;$ $в)\cos x\ge -\frac{1}{2}$	$а)\cos x>0;$ $б)\sin x\le 0;$ $в)\sin x\le -\frac{1}{2}$	$а)\sin x\ge 0;$ $б)\cos x<0;$ $в)\cos x\le -\frac{1}{2}$	$а)\cos x>0;$ $б)\sin x\le 0;$ $в)\sin x\ge -\frac{1}{2}$

Задание 5

Постройте графики тригонометрических функций:

a)$y=sinx+\pi$

b)$y=\cos 4x$

c)$y=-sin3x$

d)$y=0{,}5cosx$

РАЗДЕЛ 4. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ

4.1. Понятие производной. Формулы и правила дифференцирования.

Производная функции (в точке) — это понятие дифференциального исчисления, которое характеризует скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Функцию, которая имеет конечную производную (в некоторой точке), называют **дифференцируемой** (в данной точке).

Правила дифференцирования:

1. Производная суммы равна сумме производных

$$(u+v)' = u' + v'$$

2. Производная разности равна разности производных

$$(u-v)' = u' - v'$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак производной

$$(k \cdot u)' = k \cdot u'$$

4. Производная произведения равна произведению первого множителя на второй плюс первый множитель, умноженный на производную второго

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

5. Производная частного равна производной числителя умноженного на знаменатель минус числитель умноженный на производную знаменателя и все это деленное на квадрат знаменателя

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Таблица производных:

Функция	Производная
$y = c$, где $c = const$	$y' = 0$
$y = cx$	$y' = c$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = e^{nx}$	$y' = n \cdot e^{nx}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = ln\, x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = cos\, x$	$y' = -sinx$
$y = tg\, x$	$y' = \frac{1}{cos^2 x}$
$y = ctg\, x$	$y' = -\frac{1}{sin^2 x}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$

Производная сложной функции.

Сложная функция – это функция в функции $y = f(g(x))$, где $f(x) -$ внешняя функция, $g(x)$ – внутренняя функция.

Алгоритм вычисления сложной функции $y = f(g(x))$.

1) Определить внешнюю функцию $f(g)$

2) Найти производную внешней функции $f'(g)$

3) Определить внутреннюю функцию $g(x)$.
4) Найти производную внутренней функции $g'(x)$
5) найти произведение производной внешней на производную внутренней функции $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Задание 1

Найдите производную функции:

a) $y = x^2$	e) $y = 8x^3 + 3x^2 - x$	i) $y = \sqrt[3]{x^2}$
b) $y = x^5$	f) $y = 2x^2 + 4x$	j) $y = \sqrt{2x}$
c) $y = 10\,x^3$	g) $y = x^{-5}$	k) $y = 3x^2 - 5x^2 + 7x + 10$
d) $y = x^3 - 2x^2 + 7x - 1$	h) $y = x^{\frac{5}{2}}$	l) $y = 7x^8 + 9\sqrt{3x} + 2$

Задание 2

Найдите производную функции использую правила дифференцирования:

a) $y = (3x - 4)(4 - 5x)$.	e) $y = \frac{3x-2}{5x+8}$	i) $y = \sqrt{x} \cdot (3x^5 - x)$
b) $y = \frac{3x-2}{x+2}$	f) $y = \frac{x^2}{2x-1}$	j) $y = \frac{5-2x^6}{1-x^3}$
c) $y = (3x - 1) \cdot 5^x$	g) $y = x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 5x$	k) $y = \sqrt{x} \cdot (2x^2 - x)$
d) $y = x^2(3x + x^2)$	h) $y = (\frac{3}{x} + x^2)(2 - \sqrt{x})$	l) $y = (4x - 3x^2) \cdot (x^2 - 5x)$

Задание 3

Вычислите производную сложной функции:

a) $y = \cos 3x$	d) $y = \sqrt{\cos x}$	g) $y = (9x + 5)^4$	j) $y = \frac{1}{(5x+1)^3}$
b) $y = (3 - 5x)^2$	e) $y = \sqrt{9 - x^2}$	h) $y = (3 - \frac{x}{2})^{-9}$	k) $y = (\frac{1}{4}x - 7)^8 - (1 - 2x)^4$
c) $y = (2x + 1)^7$	f) $y = \frac{1}{(6x-1)^5}$	i) $y = (4 - 1{,}5x)^{10}$	l) $y = (5x - 2)^{13} - (4x + 7)^{-6}$

Задание 4

Найдите производные тригонометрических функций:

a) $y = 2\cos x$	e) $y = \sqrt{3} - 3tg\,x$	i) $y = x + 2\sin x$	m) $y = cos2x \cdot sinx + sin2x \cdot cosx$
b) $y = -0{,}5\sin x$	f) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin x$	j) $y = \frac{\cos 3x}{x}$	n) $y = \sin 3x \cdot cos3x$
c) $y = 3\sin x$	g) $y = 2\sin x + 1{,}5\cos x$	k) $y = sin^2 x$	o) $y = -sin^2\frac{x}{4} + cos^2\frac{x}{4}$
d) $y = 1 - \cos x$	h) $y = \cos x - tg\,x$	l) $y = sin^2 x + cos^2 x$	p) $y = 2\,sin^2 x - \sqrt{2}x$

4.2. Понятие о непрерывности функции. Метод интервалов.

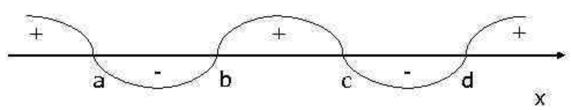
ТЕОРЕМА. Если функция $y = f\,(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Свойство непрерывных функций.

Если на интервале $(a;\ b)$ функция непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак. На этом свойстве основан метод решения неравенств с одной переменной – метод интервалов.

Метод интервалов.

Пусть функция непрерывна и обращается в нуль в конечном числе точек. По свойству непрерывных функций этими точками ОДЗ разбивается на интервалы, в каждом из которых непрерывная функция сохраняет постоянный знак.



4.3. Монотонность функции. Точки экстремума.

Монотонная функция — это функция, приращение которой не меняет знака, то есть либо всегда неотрицательное, либо всегда неположительное. Если в дополнение приращение не равно нулю, то функция называется строго монотонной. Монотонная функция — это функция, меняющаяся в одном и том же направлении.

Функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. **Функция убывает**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Точка называется **критической,** если она является внутренней точкой области определения и производная в ней равна нулю или не существует.

Если производная функции $f' > 0$ в каждой точке интервала I, то функция возрастает на I.

Если производная функции $f' < 0$ в каждой точке интервала I, то функция убывает на I.

Алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания функции

1. Найти область определения функции
2. Найти производную функции
3. Найти критические точки, решив уравнение $f'(x) = 0$
4. Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на полученных промежутках
5. Выписать промежутки возрастания и убывания на основе признаков.

Важно помнить, что любая точка экстремума является критической точкой, но не всякая критическая является экстремальной.

Точки максимума и минимума – *точки экстремума.*

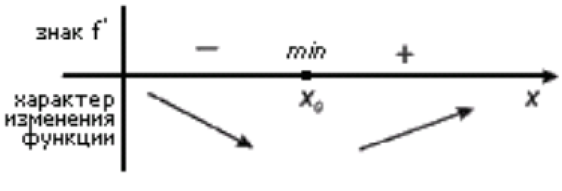
Точку $x = x_0$ называют точкой минимума функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

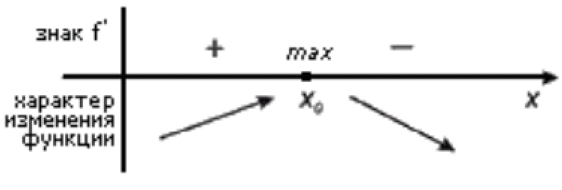
Точку $x = x_0$называют точкой максимума функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Чтобы найти наименьшее и наибольшее значение функции необходимо произвести следующие правило:

1. Критические точки разбивают область определения функции на промежутки, в каждом из которых производная сохраняет постоянный знак (+ или -)

2. Этот знак можно найти, вычислив значения производной в какой либо точке промежутка.





Задание 1

Найдите критические точки:

a) $f(x) = 2x^2 - x$	d) $f(x) = x^3 - 3x + 1$	g) $f(x) = x^2 - 8x + 5$
b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$	e) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$	h) $f(x) = 2x + 3$
c) $f(x) = 2x + 3 - x^2$	f) $f(x) = 2x^3 - x^4$	i) $f(x) = -x^2 + 8x - 7$

Задание 2

a) Найдите наименьшее и наибольшее значение на [0;6]: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 225$

b) Найдите наименьшее и наибольшее значение на [-1;1]: $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$

c) Найдите наименьшее и наибольшее значение на [-2;2]: $f(x) = 8 - 0.5x^2$

d) Найдите наименьшее и наибольшее значение на [-1;6]: $f(x) = 6x^2 - x^3$

e) Найдите наименьшее и наибольшее значение на [0;6]: $f(x) = x^2 - 6x + 13$

f) Найдите наименьшее и наибольшее значение на [0;3]:

$$f(x) = -x^2 + 9x^2 - 24x + 10$$

Задание 3

Найти промежутки возрастания и убывания функции:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + x - 10$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$

d) $f(x) = 8x + \frac{1}{4}x^4$

e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

f) $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 2)$

Задание 4

Найти экстремумы функции:

a) $f(x) = 3x^5 - 20x^3 - 54$

b) $f(x) = x^2 - 10x + 5$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 11$

d) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

f) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$

4.4. Исследование функций и построение графиков

Схема исследования функции:

1. Найти область определения функции (если возможно, то множество значений).
2. Выяснить, не является ли функция чётной, нечётной, периодической.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти асимптоты графика функции (если это необходимо, только для функций, которые имеют точки разрыва, т.е. не являются непрерывными).
5. Найти промежутки монотонности функции и её экстремумы.

6*. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба (применение производной второго порядка).

7.Вычислить координаты дополнительных точек (если это необходимо).

В зависимости от сложности функции некоторые пункты данной схемы могут быть пропущены.

Пример. Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Решение

1. $D(f) = R$

2.Исследуем на чётность: $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2x^2 - x = -(x^3 + 2x^2 + x) \neq -f(x)$. Функция не является ни чётной, ни нечетной, т.е. общего вида.

3. Пересечение с осью Ох:

$f(x) = 0, x^3 - 2x^2 + x = 0, x(x^2 - 2x + 1) = 0, x(x-1)^2 = 0, x = 0$ или $x - 1 = 0$, $x = 1$. Таким образом, получили две точки $(0; 0)$ и $(1; 0)$.

Пересечение с осью Оу: $x = 0, f(0) = 0$.

4. С помощью производной найдём промежутки монотонности этой функции и её точки экстремума.

Производная равна $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Найдем стационарные точки:

$3x^2 - 4x + 1 = 0$, откуда $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1$.

Для определения знака производной разложим квадратный трёхчлен $3x^2 - 4x + 1 = 0$ на множители: $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$.

Производная положительна на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает.

При $\frac{1}{3} < x < 1$ производная отрицательна, следовательно, на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ функция убывает.

Точка $x_1 = \frac{1}{3}$ является точкой максимума, так как слева от этой точки функция возрастает, а справа убывает. Значение функции в этой точке равно $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как слева от этой точки функция убывает, а справа возрастает; её значение в точке минимума равняется $f(1) = 0$.

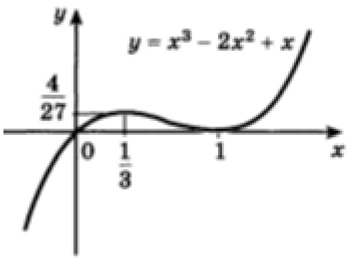
Результаты исследования представим в следующей таблице:

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

5. Для более точного построения графика найдём значения функции ещё в двух точках:

$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-9}{8}, f(2) = 2$.

Используя результаты исследования, построим график функции $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + x}$.



<u>**Задание 1**</u>

Исследуйте и постройте графики функций:

a)$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

e) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
f) $f(x) = x^2 - 12x + 4$
g) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

4.5. Первообразная функции. Правила нахождения первообразных

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X ,если для любого x из промежутка X выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$

Основное свойство первообразных:

Любая первообразная для функции f на промежутке X может быть записана в виде $F(x) + C$,где $F(x)$ – одна из первообразных для функции f(x) на промежутке X, а C – произвольная постоянная.

В этом утверждении сформулированы два свойства первообразной

1) какое бы число ни подставить вместо C, получим первообразную для f на промежутке X;

2) какую бы первообразную F для f на промежутке X ни взять, можно подобрать такое число C, что для всех x из промежутка X будет выполнено равенство f(x) = F(x) + C.

Теорема: Всякая функция $y = f(x)$ имеет бесконечно много первообразных, вида $y = F(x) + C$, где C-некоторая постоянная.

Таблица первообразных некоторых функций.

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	c
1	x+c
x	$\frac{x^2}{2}$ +c
x^n (nϵN)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ +c
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{x}$	ln$\|x\|$+c
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$ ($при\, x > 0$)
$\sin x$	$-\cos x$+c
$\cos x$	$\sin x$+c
$\frac{1}{sin^2 x}$	$-ctg\, x + c$
$\frac{1}{cos^2 x}$	$tg\, x + c$
e^x	$e^x + c$

Правила отыскания первообразных.

1. Первообразная суммы равна сумме первообразных

Пример: $f(x) = x^3 + e^x$

$F(x) = \frac{x^4}{4} + e^x + c$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной

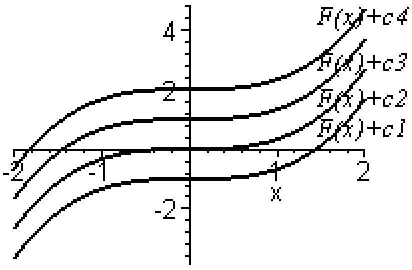
Пример: $f(x) = 6\,x^2$

$$F(x) = 6 * \frac{x^3}{3} + c = 2x^2 + c$$

3. Если $y = F(x)$- первообразная для функции $y = f(x)$, то первообразная для функции $y = f(kx + m)$служит функция $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$

Пример: $f(x) = (5x + 4)^3$

$$F(x)=\frac{1}{5}\frac{(5x+4)^4}{4}+c=\frac{(5x+4)^4}{20}+c$$



Геометрический смысл первообразной.

Графики первообразных – это кривые, получаемые из любой первообразной путём параллельного переноса вдоль оси OY.

<u>Задание 1</u>

Найти первообразные для функций.

a) $f(x)=x^5$
b) $f(x)=2x^5$
c) $f(x)=5^x$
d) $f(x)=sinx$
e) $f(x)=6x^6$
f) $f(x)=1+3e^x-4cosx$
g) $f(x)=2x^5-3x^2$
h) $f(x)=5x^4+2x^3$
i) $f(x)=6x^2+4x\quad+3$
j) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$
k) $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$
l) $f(x)=5\sin x+2\cos x$
m) $f(x)=1+3e^x-4\cos x$
n) $f(x)=5x^5-6sinx$

<u>Задание 2</u>

Найдите первообразные используя правила:

a) $f(x)=x^5-3x^2$
b) $f(x)=6x^2-4x+3$
c) $f(x)=6x^2-4x+3$
d) $f(x)=x^2+cosx$
e) $f(x)=(5x+4)^3$
f) $f(x)=(x+1)^3$
g) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$
h) $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$
i) $f(x)=5\sin x+2\cos x$
j) $f(x)=\sqrt{3-2x}$
k) $f(x)=\sin(\frac{x}{4}+5)$
l) $f(x)=6\cos 8x$
m) $f(x)=e^{3x}-\cos 2x$
n) $f(x)=\frac{3x^4+5x^2}{x^3}$
o) $f(x)=\frac{2x^3-3x}{x^2}$
p) $f(x)=(1+2x)\cdot(x-3)$
q) $f(x)=(2x-3)\cdot(2+3x)$

<u>Задание 3</u>

Найдите для функции f первообразную, график которой проходит через точку M:

a) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}, M(-1;4)$
b) $f(x)=x^3+2, M(2;15)$
c) $f(x)=1-2x, M(3;2)$
d) $f(x)=\frac{1}{x^3}-10x^4+3, M(1;5)$
e) $f(x)=2x+1, M(0;0)$

f) $f(x) = x + 2, M(1; 3)$
g) $f(x) = 3x^2 - 2x, M(1;4)$
h) $f(x) = -x^2 + 3x, M(2; -1)$
i) $f(x) = 2x + 3, M(1; 2)$
j) $f(x) = \cos 3x, \quad M(0; 0)$
k) $f(x) = \sqrt{x + 2}, \ M(2; -3)$
l) $f(x) = 4x - 1, M(-1; 3)$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ:

1. Может ли функция иметь несколько первообразных?
2. Как называется функция $y = F(x)$ для функции $y = f(x)$ на промежутке X, если для $x \in X$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$?
3. Графики первообразных это-…

<u>4.6. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона – Лейбница</u>

Совокупность $F(x) + c$ всех первоначальных функций $f(x)$ на интервале $a < x < b$ называют **неопределённым интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначают $\int f(x)dx$.

Символ $\int$ – называется знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)\ dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла для заданной функции называется ***интегрированием***.

Свойства неопределенного интеграла:

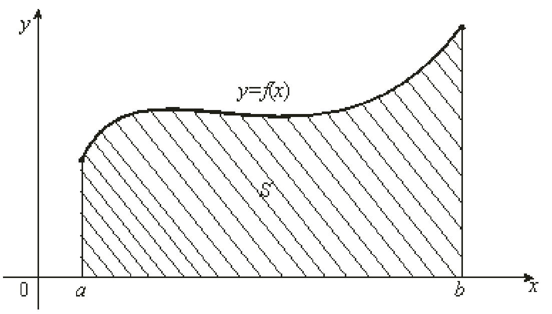
1. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов:
$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int k\ f(x)dx = k \cdot \int f(x)\ dx$, где $k = const.$
3. Если функция $F(x)$ является первоначальной для $f(x)$, где k и b произвольные числа ($k \neq 0$), то $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + c$

Таблица основных интегралов:

1. $\int dx = x + c$	6. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
2. $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$	7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	8. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\ x + c$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ (n \neq -1)$	9. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\ x + c$
5. $\int e^x dx = e^x + c$	10.

Определённым интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называют предел соответствующих интегральных сумм и обозначают: $\int_a^b f(x)dx$

Геометрический смысл определенного интеграла:



Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$. **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью $0x$, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$.

Основные свойства определенного интеграла

1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt = \cdots$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

4. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $a < b < c$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5. Формула Ньютона–Лейбница

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на этом отрезке, то справедлива следующая формула:

$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$, которая называется формулой Ньютона–Лейбница. Разность $F(b)$ - $F(a)$ принято записывать следующим образом:

$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, где символ $\Big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки.

Таким образом, формулу (2) можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>Задание 1</u>

Вычислите неопределенный интеграл:

a) $\int x^2 dx$
b) $\int 2x\, dx$
c) $\int \frac{1}{x^3} dx$
d) $\int e^x\, dx$
e) $\int \sin x\ dx$
f) $\int (2x - 3)\, dx$
g) $\int (9x^2 + 4\cos x + 6e^x + 7)\ dx$
h) $\int (2 + x)(x - 3)\, dx$
i) $\int (4(x + 3)^2 + 6)\, dx$

<u>Задание 2</u>

Вычислить интеграл.

a) $\int (5 - 4x)dx$

b) $\int (9x^2 - 3x + 7)dx$

c) $\int (e^{3x+4} - 6\,cos(5x + 2) + 8)\, dx$

<u>Задание 3</u>

Вычислите определенный интеграл:

a) $\int_1^3 x^2 dx$

b) $\int_0^1 (x-1)dx$

c) $\int_{-2}^{-1} (5-4x)dx$

d) $\int_0^2 (3x^2-4x+5)dx$

e) $\int_{-2}^{-1} (6x^2+2ч-10)dx$

f) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$

g) $\int_0^2 e^{3x} dx$

h) $\int_1^3 2e^{2x} dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx$

j) $\int_1^2 3\frac{1}{2x-1} dx$

k) $\int_0^1 (3x^2+2e^{2x+1})\, dx$

l) $\int_1^9 (2+6\frac{1}{x}) dx$

m) $\int_0^1 (x+3)(2x-1) dx$

n) $\int_0^1 (7x-4)e^{3x} dx$

o) $\int_{\pi}^{2\pi} x^2 \cos 4x\, dx$

p) $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16} dx$

q) $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^2}}$

r) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^4+16}} dx$

s) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x+1} dx$

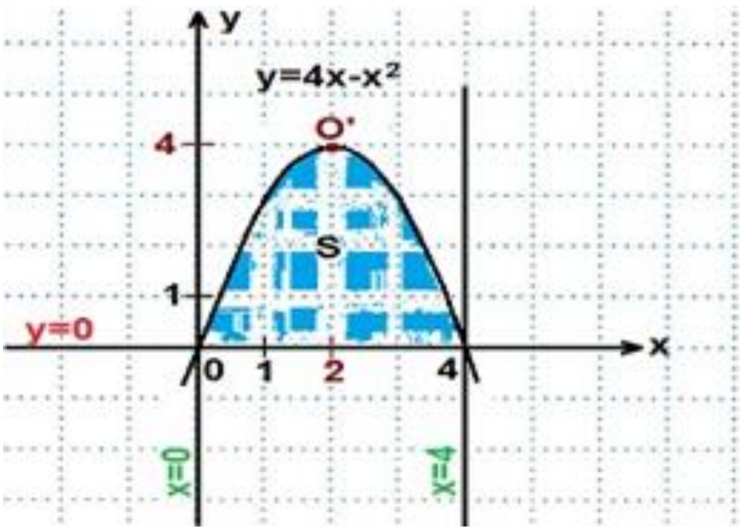
t) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

u) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, tg^2\, x\, dx$

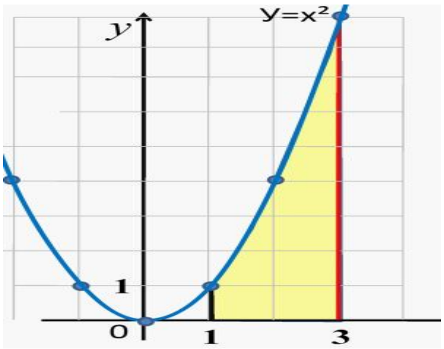
Задание 4

Вычислите площадь заштрихованной фигуры.

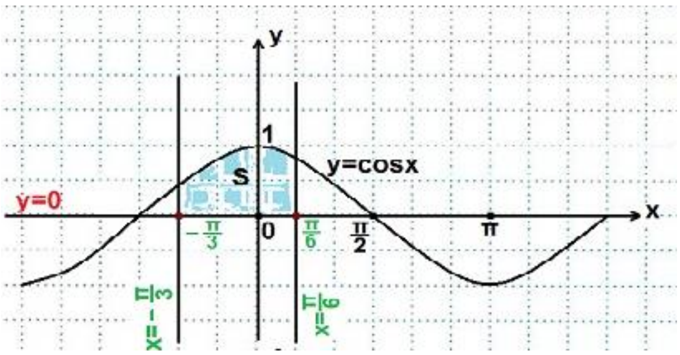
a)



b)



c)



Задание 5

Вычислите площадь фигуры ограниченной линиями:

a) $y = 4 - x^2$ и $y = x + 2$

b) $y = x^2 + 2$ и $y = 6$

c) $y = x^2 - 6x + 9$; $y = x^2 + 4x + 4$; $y = 0$;

d) $y = 8x - 4x^2$ и $y = 0$

e) $y = x^2$ и $y = 4x - 3$

f) $y = x$; $y = 0$; $x = 2$;

g) $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = 0$

h) $y = x^2 + 1$ и $y = 3 - x$

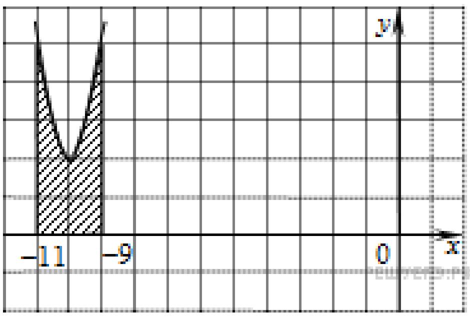
i) $y = x^2$ и $y = 2x$

j) $y = (1 - x)(x + 2)$ и $y = 0$

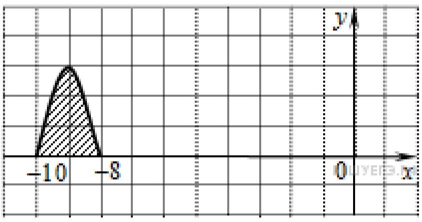
k) $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = 0$

Задание 6

a) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



b) На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



ВОПРОСЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ:

1. Чем отличается определенный интеграл от неопределенного интеграла?
2. Для нахождения определенного интеграла используют формулу знаменитого ученого…..
3. Перечислите свойства определенного интеграла.

4.7. Решение задач. Производная и первообразная функции.

Вариант 1

Задание 1

Найти первообразные для функций:

a) $f(x) = 5x^9 + 2\cos x - 4$;

b) $f(x) = 7(8x + 4)^6 - 2$;

c) $f(x) = 6\sin 3x - 8e^{3x} + 6$.

Задание 2

Вычислить неопределенный интеграл:

a) $\int(2x^3 - 6e^x + 4)dx$;

b) $\int 7(3x - 2)^6 dx$;

c) $\int 5\cos 4x\, dx$.

Задание 3

Вычислить определенный интеграл:

a) $\int_0^1 (3x^2 - 7)dx$;

b) $\int_1^2 (4x - 3)^2 dx$;

c) $\int_0^1 (e^x - 6)dx$.

Задание 4

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

a) y=2x+3, x=-1, x=1, y=0;

b) $y = x^2 + 1, x = -1, x = 1, y = 0$.

Вариант 2

Задание 1

Найти первообразные для функций:

a) $f(x) = 4x^5 + 3\sin x - 5$;

b) $f(x) = 6(3x + 4)^5 + 4$;

c) $f(x) = 8\sin 2x - 8e^{2x} + 4$.

Задание 2

Вычислить неопределенный интеграл:

a) $\int(4x^3 - 2e^x + 3)dx$;

b) $\int 11(2x - 1)^6 dx$;

c) $\int 3\cos 2x\, dx$.

Задание 3

Вычислить определенный интеграл:

a) $\int_0^1 (4x-2)dx$;

b) $\int_0^1 (3x+4)^2 dx$;

c) $\int_1^2 (2e^x+3)dx$.

<u>Задание 4</u>

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

a) y=4x-2, x=0, x=1, y=0;

b) $y=-x^2+2, x=-1, x=1, y=0$.

Вариант 3

<u>Задание 1</u>

Найти первообразные для функций:

a) $f(x)=6x^{10}+3\cos x+4$;

b) $f(x)=3(2x+4)^5-2$;

c) $f(x)=6os{-}8e^{4x}-7$.

<u>Задание 2</u>

Вычислить неопределенный интеграл:

a) $\int (3x^4-5e^x+6)dx$;

b) $\int 4(4x-2)^5 dx$;

c) $\int 5\sin 4x\,dx$.

<u>Задание 3</u>

Вычислить определенный интеграл:

a) $\int_0^1 (2x^2+4)dx$;

b) $\int_1^2 (3x-4)^2 dx$;

c) $\int_0^1 (e^x-7)dx$.

<u>Задание 4</u>

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

a) y=-2x+3, x=0, x=1, y=0;

b) $y=x^2+2, x=-1, x=1, y=0$.

Вариант 4

<u>Задание 1</u>

Найти первообразные для функций:

a) $f(x)=11x^5+3e^x-5$;

b) $f(x)=3(2x+4)^5+4$;

c) $f(x)=8\sin 2x{-}8e^{2x}+4$.

<u>Задание 2</u>

Вычислить неопределенный интеграл:

a) $\int (4x^3-2e^x+3)dx$;

b) $\int 11(2x-1)^6 dx$;

c) $\int 3\cos 2x\,dx$.

<u>Задание 3</u>

Вычислить определенный интеграл:

a) $\int_0^1 (4x-2)dx$;

b) $\int_0^1 (3x+4)^2 dx$;

c) $\int_1^2 (2e^x+3)dx$.

<u>Задание 4</u>

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

a) $y=4x-2, x=0, x=1, y=0$;

b) $y=-x^2+2, x=-1, x=1, y=0$.